

Összetett rezgések

I. rész

Bevezetés

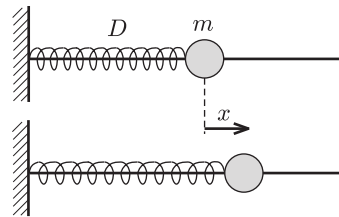
A középiskolában általában nincs lehetőség a rezgőmozgások mélyebb tárgyalására, legtöbbször csak az egyszerű harmonikus rezgés ismertetésére kerül sor. Ennek oka nem csak az idő szűkében rejlik, hanem abban is, hogy a bonyolultabb *összetett rezgések* szokásos tárgyalása a középiskolai tananyagon jócskán túlnyúló, lineáris algebrai ismereteket igényel (mátrixok sajátértékproblémája). A környezetünkben túlnyomórészt ezekkel az összetett rezgésekkel találkozunk: a pohár koccanása, a tortaszelé remegése, a kristályokban a rácсионok nyüzsgése mind-mind összetett rezgés, amelyek nem érthetők meg pusztán az egyszerű harmonikus rezgőmozgásra vonatkozó ismeretekkel.

Ez a kétrészes cikk kísérletet tesz arra, hogy nehéz matematikai apparátus nélkül, egyszerű példákon keresztül, középiskolások számára is érthető módon tárgyalja az összetett rezgéseket és a témához kapcsolódó olyan érdekes jelenségeket, mint a csatolt ingák rezgése vagy a lebegés.

Az egyszerű harmonikus rezgőmozgás

Elevenítsük fel először a harmonikus rezgésre vonatkozó ismereteket a következő egyszerű példán keresztül!

1. példa. *Függőleges falból vízszintesen egy egyenes, hosszú, merev huzal áll ki. A huzalra m tömegű gyöngy van felfűzve. A gyöngyöt D direkciós erejű húzó-nyomó rugó kapcsolja a falhoz (1. ábra). A kezdetben álló gyöngyöt v_0 kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngy súrlódásmentesen csúszhat a huzalon.)*



1. ábra

Megoldás. A gyöngyre ható függőleges irányú erők kiegyenlítik egymást, vízszintesen pedig csak a rugóerő hat, így a mechanika alapegyenlete az

$$ma(t) = -Dx(t)$$

alakot ölti, ahol $x(t)$ a gyöngy egyensúlyi helyzetétől mért (időtől függő) kitérése, $a(t)$ a gyorsulása, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a gyorsulás mindig a kitéréssel ellentétes irányú. Az egyszerűség kedvéért a fizikai mennyiségek változási gyorsaságát¹ jelöljük a fizikai mennyiség fölé írt ponttal, azaz legyen a gyöngy sebessége $v(t) = \dot{x}(t)$, a gyorsulása pedig $a(t) = \ddot{x}(t)$! A mozgásegyenletet átrendezve az

$$(1) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

alakú egyenletre jutunk, ahol bevezettük az $\omega = \sqrt{D/m}$ jelölést. Az (1) egyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet a gyöngy kitérésének $x(t)$ időfüggésére, melyet szerencsére nem kell tudnunk megoldani, hiszen a megoldása a jól ismert

$$(2) \quad x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

formát ölti, a gyöngy sebességét pedig a deriválással (vagy a mechanikai energiamegmaradásból) kapható

$$(3) \quad \dot{x}(t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

kifejezés adja meg, ahol ω a rezgés fent bevezetett körfrekvenciája, \mathcal{A} a rezgés amplitúdója (legnagyobb kitérése), φ_0 pedig a rezgés kezdőfázisa. Utóbbi kettő a kezdeti feltételektől függ, vagyis a gyöngy kezdeti kitéréséből és sebességéből kiszámítható.

A konkrét példánkban kezdetben a gyöngy az egyensúlyi helyzetben volt ($x(0) = 0$), ezért a φ_0 kezdőfázis értéke zérus. A kezdősebesség nagysága $\dot{x}(0) = \mathcal{A}\omega = v_0$ volt, így a mozgás amplitúdójának nagysága $\mathcal{A} = v_0/\omega$. A feladatbeli kezdőfeltételek esetén tehát a gyöngyszem mozgását az

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

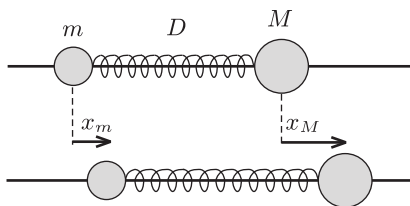
¹idő szerinti deriváltját

összefüggés írja le.

Két, rugóval összekötött tömegpont mozgása

Az első példánál egy fokkal bonyolultabb a rugóval összekötött két tömegpont mozgása, amely jól ismert a fizika-versenyekre járók körében. A probléma szokásos megoldási módja a következő: A tömegközéppont egyenletesen haladó mozgását leválasztjuk úgy, hogy beleülünk a tömegközépponttal együtt mozgó koordinátarendszerbe. Itt a rugónak a rendszer tömegközéppontjával egybeeső pontja áll, ezért az egyes testek úgy mozognak, mintha a tömegközéppont által kettéosztott rugó hozzájuk közelebb eső darabja mozgatná őket. Ezzel a gondolattal meghatározható a rezgés körfrekvenciája. Itt azonban egy másik, a bonyolultabb rendszerek esetén is járható utat választunk a megoldáshoz.

2. példa. Egy egyenes, hosszú, vízszintes, merev huzalra m és M tömegű gyöngyök vannak felfűzve. A gyöngyöket D direkciós erejű húzó-nyomó rugó kapcsolja össze (2. ábra). A kezdetben álló rendszert az m tömegű gyöngynek adott v_0 kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngyök súrlódásmentesen csúszhatnak a huzalon.)



2. ábra

Megoldás. Jelöljük az m tömegű gyöngy kezdeti helyzettől mért elmozdulását x_m -mel, az M tömegű gyöngy elmozdulását pedig x_M -mel! Az egyes testekre vízszintesen csak a rugóerő hat, így a gyöngyök mozgásegyenletei:

$$(4) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_m &= D(x_M - x_m), \\ M\ddot{x}_M &= -D(x_M - x_m). \end{aligned}$$

Ezek szembeötlően nem az (1) egyenlethez hasonló kifejezések, azaz a testek mozgása nem egyszerűen harmonikus rezgőmozgás. A további vizsgálódás kedvéért osszuk el az egyenletet a tömegekkel, majd adjuk hozzá az első egyenlethez a második α -szorosát (ahol α valós szám)! Az eredmény:

$$(5) \quad \ddot{x}_m + \alpha\ddot{x}_M = -\left(\frac{D}{m} - \alpha\frac{D}{M}\right)(x_m - x_M).$$

Vezessük be az eredeti koordináták lineáris kombinációjaként² képzett

$$y(t) = x_m(t) + \alpha x_M(t)$$

mennyiséget! A változási gyorsaság képzési szabályából következik, hogy az $y(t)$ mennyiség „gyorsulása” a gyöngyök gyorsulásaival hasonlóan egyszerű kapcsolatban van:

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_m(t) + \alpha\ddot{x}_M(t).$$

Az új $y(t)$ változó bevezetésével észrevehetjük, hogy az (5) egyenlet $\alpha = M/m$ vagy -1 esetén

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

alakúra hozható, ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \alpha\frac{D}{M}}.$$

Tehát a két lehetséges lineárkombináció és a hozzájuk tartozó körfrekvencia:

$$(6) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= x_m(t) + \frac{M}{m}x_M(t), & \omega_1 &= 0, \\ y_2(t) &= x_m(t) - x_M(t), & \omega_2 &= \sqrt{D\frac{m+M}{mM}}. \end{aligned}$$

²Az x_1, x_2, x_3, \dots mennyiségek lineáris kombinációján a $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots$ alakú összeget értjük, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (most) valós számok

Az $y_1(t)$ lineárokombináció egy zérus frekvenciájú rezgés egyenletét elégíti ki, vagyis $\ddot{y}_1(t) = 0$. Ez éppen az egyenletes (tehát nulla gyorsulású) mozgás egyenlete, aminek megoldása

$$y_1(t) = y_1(0) + \mathcal{V}t,$$

ahol $y_1(0)$ -t és \mathcal{V} -t a kezdeti feltételek határozzák meg. Az $y_2(t)$ lineárokombináció egy ω_2 körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás egyenletét elégíti ki, így $y_2(t)$ és $\dot{y}_2(t)$ időfüggése a (2) és (3) összefüggéseknek megfelelően

$$y_2(t) = \mathcal{A} \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

$$\dot{y}_2(t) = \mathcal{A}\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0),$$

ahol az amplitúdót és a kezdőfázist most is a kezdeti feltételek határozzák meg.

Vajon milyen kapcsolatban vannak az $y_1(t)$ és $y_2(t)$ lineárokombinációk az m és M tömegű gyöngyök mozgásával? Nincs más dolgunk, mint $y_1(t)$ és $y_2(t)$ ismeretében megoldani a (6) egyenletrendszert $x_m(t)$ -re és $x_M(t)$ -re. Így a gyöngyök mozgását leíró egyenletek:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_m(t) &= \frac{m}{m+M} y_1(t) + \frac{M}{m+M} y_2(t), \\ x_M(t) &= \frac{m}{m+M} y_1(t) - \frac{M}{m+M} y_2(t). \end{aligned}$$

További kérdés, hogy van-e fizikai jelentése az $y_1(t)$ és $y_2(t)$ lineárokombinációknak? A (7) egyenletekből leolvasható, hogy

- ha $y_1(t) \neq 0$ és $y_2(t) = 0$, a két test kitérése minden időpillanatban megegyezik, így a testek rezgés nélkül tisztán haladó mozgást végeznek. Az $y_1(t)$ tehát a testek egyenletes haladó mozgását írja le.
- ha $y_2(t) \neq 0$ és $y_1(t) = 0$, a két test kitérése minden időpillanatban ellentétes irányú, nagyságuk pedig fordítottan arányos a gyöngyök tömegével, így ebben az esetben a rendszer tömegközéppontja áll. $y_2(t)$ a gyöngyök egymáshoz viszonyított rezgőmozgását írja le.

Most térjünk vissza a konkrét példánk megoldásához! Az általános megoldásokat illesztenuünk kell a kezdeti feltételekhez. Kezdetben mindkét gyöngy elmozdulása zérus, tehát $x_m(0) = x_M(0) = 0$, azaz a rezgés kezdőfázisa nulla. Az indítás pillanatában az m tömegű test sebessége v_0 , az M tömegű test pedig áll, így $\dot{x}_m(0) = v_0$ és $\dot{x}_M(0) = 0$. (6) felhasználásával $\dot{y}_1(0) = \mathcal{V} = v_0$ és $\dot{y}_2(0) = v_0$ adódik. Az $y_1(t)$ és $y_2(t)$ lineárokombinációk időfüggése tehát:

$$(8) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= v_0 t, \\ y_2(t) &= \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t). \end{aligned}$$

Ezeket beírva a (7) egyenletekbe:

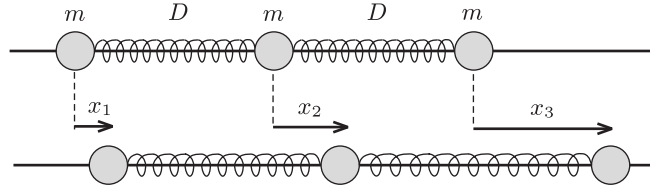
$$\begin{aligned} x_m &= \frac{m}{m+M} v_0 t + \frac{M}{m+M} \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t), \\ x_M &= \frac{m}{m+M} v_0 t - \frac{M}{m+M} \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t). \end{aligned}$$

Végül tehát előzetes várakozásainknak megfelelő eredményt kaptunk: a testek olyan összetett mozgást végeznek, melyben a rendszer tömegközéppontja (az impulzusmegmaradás értelmében) $v_0 m / (m + M)$ sebességgel egyenletesen halad, valamint a testek ω_2 körfrekvenciával rezegnek a tömegközéppont körül. Ha az m/M tömegarány nagyon kicsi, akkor az M tömegű gyöngy lényegében állónak tekinthető és az m tömegű test mozgására visszakapjuk az 1. példa eredményeit.

Három, rugóval összekötött tömegpont mozgása

Az előbb megismert módszert alkalmazzuk most három testből és két rugóból álló rendszer rezgéseinek leírására. Legyen a konkrét feladat a következő:

3. példa. Egy egyenes, hosszú, vízszintes, merev huzalra három azonos m tömegű gyöngy van felfűzve. A középső gyöngyöt egy-egy D direkciós erejű, egyforma húzó-nyomó rugó kapcsolja a két szélsőhöz (3. ábra). A kezdetben álló rendszert a bal szélső gyöngynek adott v_0 kezdeti sebességgel elindítjuk. Írjuk le a mozgást! (A gyöngyök súrlódásmentesen csúszhatnak a huzalon.)



3. ábra

Megoldás. Jelöljük a bal szélső gyöngy elmozdulását x_1 -gyel, a középsőt x_2 -vel, a jobb szélsőt pedig x_3 -mal! Az egyes rugók megnyúlása $x_2 - x_1$ és $x_3 - x_2$, így a három gyöngyre a mozgásegyenletek:

$$(9) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= D(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -D(x_2 - x_1) + D(x_3 - x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= -D(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Bevezetve az $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ jelölést és rendezve:

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega_0^2(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= \omega_0^2(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ \ddot{x}_3 &= \omega_0^2(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek (akárcsak a két testből álló rendszernél) most sem hasonlítanak a szokásos harmonikus rezgés mozgásegyenletére, de látni fogjuk, hogy az x_1 , x_2 és x_3 koordinátákból megfelelő lineáris kombinációval most is kikeverhető olyan $y(t)$ mennyiség (nem is egy, hanem három), melynek időbeli változását a harmonikus rezgés (1) egyenlete írja le. Keressük tehát azokat az α és β együtthatókat, melyekkel az

$$(11) \quad y(t) = x_1(t) + \alpha x_2(t) + \beta x_3(t)$$

módon az eredeti koordinátákból képzett lineáris kombináció időfüggése harmonikus, azaz teljesíti az

$$(12) \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

egyenletet. Ehhez szorozzuk meg a (10) összefüggések közül a másodikat α -val, a harmadikat pedig β -val, majd adjuk össze az egyenleteket!

$$\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3 = \omega_0^2((x_2 - x_1) + \alpha(x_1 - 2x_2 + x_3) + \beta(x_2 - x_3)).$$

Rendezve:

$$\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3 = \omega_0^2((\alpha - 1)x_1 + (1 - 2\alpha + \beta)x_2 + (\alpha - \beta)x_3).$$

Látható, hogy ha $\alpha = \beta = 1$, akkor az egyenlet jobb oldala eltűnik, azaz a koordináták

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

lineárkombinációja egy $\omega_1 = 0$ körfrekvenciájú

$$\ddot{y}_1(t) = 0$$

alakú „rezgési egyenletet” elégít ki. Ez azt jelenti, hogy az $y_1(t)$ mennyiség az idő függvényében egyenletesen változik, azaz

$$y_1(t) = y_1(0) + \mathcal{V}t,$$

ahol \mathcal{V} egy sebesség dimenziójú állandó (lényegében a testek kezdősebességeinek összege). Hasonlóan a 2. példa megoldásához, látni fogjuk, hogy ez a lineárkombináció írja le a rendszer tömegközéppontjának mozgását.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\alpha \neq 1$! Azért, hogy a (12) egyenlettel azonos alakú időfüggést kapjunk, végezzük el a következő kiemelést:

$$(13) \quad \underbrace{\ddot{x}_1 + \alpha\ddot{x}_2 + \beta\ddot{x}_3}_{\ddot{y}(t)} = -\underbrace{(1 - \alpha)\omega_0^2}_{\omega^2} \underbrace{\left(x_1 + \frac{1 - 2\alpha + \beta}{\alpha - 1}x_2 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}x_3\right)}_{y(t)}.$$

Innen leolvasható, hogy a harmonikus időfüggés teljesüléséhez az együtthatók között a következő összefüggéseknek kell fennállniuk:

$$(14) \quad \alpha = \frac{1 - 2\alpha + \beta}{\alpha - 1}, \quad \beta = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1},$$

a körfrekvencia pedig (13) szerint

$$(15) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha}.$$

A (14) egyenletrendszer így is írható:

$$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = \beta - 1, \quad \alpha(\beta - 1) = 0.$$

Ennek két megoldása van:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1;$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 1.$$

A korábban talált $y_1(t)$ mellett megkaptuk tehát az x_1, x_2, x_3 koordináták további két olyan lineárkombinációját, amelyek az időben (12) szerint harmonikusan változnak. Tehát a három független lineárkombináció (és a nekik megfelelő rezgési frekvencia) a következő:

$$(16) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), & \omega_1 &= 0, \\ y_2(t) &= x_1(t) - x_3(t), & \omega_2 &= \omega_0, \\ y_3(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t), & \omega_3 &= \sqrt{3}\omega_0. \end{aligned}$$

Ezek időfüggése pedig:

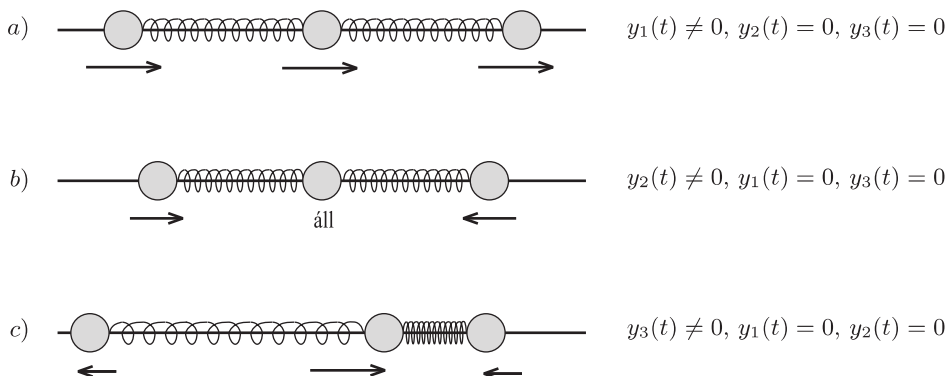
$$(17) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) + \mathcal{V}t, \\ y_2(t) &= \mathcal{A}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ y_3(t) &= \mathcal{A}_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3). \end{aligned}$$

Az $y_1(0)$ és \mathcal{V} értéke, az $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ amplitúdók és a φ_2, φ_3 kezdőfázisok a kezdeti feltételekből (azaz a kiinduló koordinátákból és sebességekből) határozhatók meg. A feladatunk most is az $x_1(t), x_2(t)$ és $x_3(t)$ kitérés-idő függvények meghatározása. A (16) egyenlet alapján ezek kifejezhetők az ismert időfüggésű $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ mennyiségekkel:

$$(18) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) + \frac{1}{6}y_3(t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{1}{3}y_3(t), \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{1}{2}y_2(t) + \frac{1}{6}y_3(t). \end{aligned}$$

A két testből álló rendszerhez hasonlóan könnyen kideríthetjük, hogy mi az $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) lineárkombinációk fizikai jelentése (4. ábra). A (18) összefüggésből látható, hogy ha

- $y_1(t) \neq 0$ és $y_2(t) = y_3(t) = 0$, akkor $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$, azaz mindhárom test kitérése megegyezik: ilyenkor a rendszer nem rezeg, ez a lineárkombináció a tisztán haladó mozgást írja le.
- $y_2(t) \neq 0$ és $y_1(t) = y_3(t) = 0$, akkor $x_1(t) = -x_3(t)$ és $x_2(t) = 0$, vagyis az $y_2(t)$ lineárkombináció olyan „lélegző” mozgásformát ír le, melyben a középső test áll, a két szélső test kitérése pedig minden időpillanatban ellentétes, egyenlő nagyságú. A rendszer tömegközéppontja ilyenkor áll.
- $y_3(t) \neq 0$ és $y_1(t) = y_2(t) = 0$, akkor $x_1(t) = x_3(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)$, ami olyan „tili-toli” mozgásformát jelent, hogy a két szélső test kitérése minden időpillanatban megegyezik, a középső pedig velük ellentétesen, kétszer akkora kitéréssel mozog. A tömegközéppont ebben az esetben sem mozog.



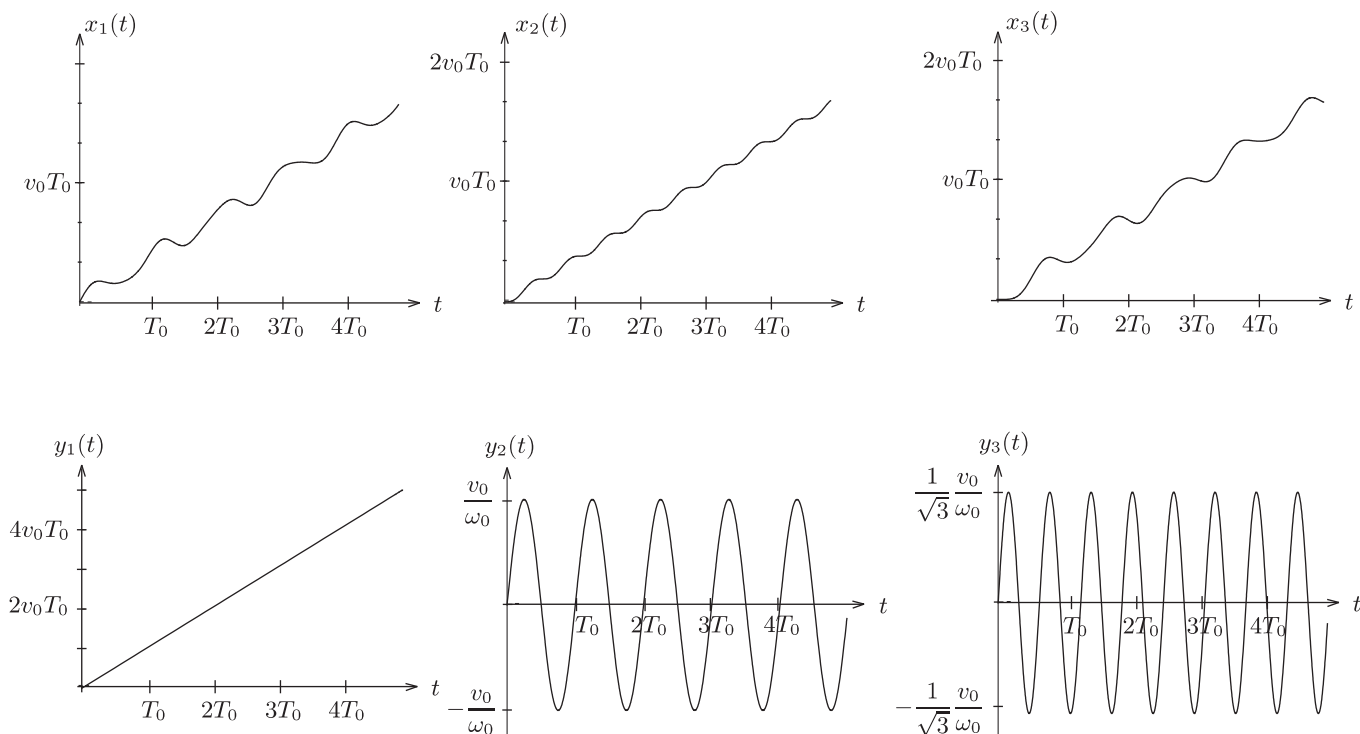
4. ábra. Az $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) lineárkombinációk fizikai jelentésének szemléltetése:

$y_1(t)$ az egyenletes mozgást (a), $y_2(t)$ a lüktető mozgást (b), $y_3(t)$ pedig a „tíli-tóli” mozgást (c) írja le. A rendszer mozgása e három mozgásforma kezdőfeltételektől függő, megfelelő arányú szuperpozíciójaként (keverékeként) állítható elő

Hátra van még a konkrét példánk megoldása, azaz a (18) általános megoldások illesztése a kezdeti feltételekhez. Kezdetben mindárom test egyensúlyi helyzetben volt, így $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Csak a bal oldali testet löktük meg v_0 kezdősebességgel, így $\dot{x}_1(0) = v_0$, $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$. Ezekből és a (16) egyenletekből következik, hogy $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$ (azaz $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$) és $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = \dot{y}_3(0) = v_0$. A (17) összefüggéseket figyelembe véve $\mathcal{V} = v_0$, $\mathcal{A}_2\omega_2 = v_0$, $\mathcal{A}_3\omega_3 = v_0$. A testek mozgását leíró egyenletek tehát:

$$(19) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{3}v_0t + \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t) + \frac{1}{6}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t), \\ x_2(t) &= \frac{1}{3}v_0t - \frac{1}{3}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t), \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}v_0t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t) + \frac{1}{6}\frac{v_0}{\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0t). \end{aligned}$$

Az egyes gyöngyök elmozdulását ábrázolhatjuk az idő függvényében, ahogy azt az 5. ábra mutatja az $y_i(t)$ lineárkombinációk időfüggésével együtt.



5. ábra.

Első sor: A három test x_i ($i = 1, 2, 3$) kitérése az idő függvényében.

Második sor: az $x_i(t)$ kitérésekből képzett $y_i(t)$ lineárkombinációk.

Az időt $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ egységekben mértük

Általános következtetések

Az előzőekben láttuk, hogy a két és három testből álló rendszerek egyenes mentén történő (egydimenziós) rezgésénél az egyes testek $x_i(t)$ koordinátáinak időfüggését leíró egyenletek általában nem hasonlítanak az egyszerű harmonikus rezgőmozgás egyenletére, de a koordinátákból megfelelő lineárkombináció képzésével előállíthatók olyan $y_i(t)$ mennyiségek, melyek már az időben harmonikusan (egy jellemző körfrekvenciával tisztán szinuszosan) változnak. Az $y_i(t)$ lineárkombinációk pontos időfüggése a rendszer kezdőfeltételeinek (kezdeti kitérések és sebességek) ismeretében meghatározható, majd abból az egyes testek elmozdulásainak $x_i(t)$ értéke is megállapítható.

Az eljárás általánosítható nagyobb rendszerekre is. Álljon a rendszerünk N tetszőleges tömegű pontszerű testből, melyek egy egyenes mentén mozoghatnak, és a kössék össze a testeket (akár különböző erősségű) rugók! Ha az i -edik test kitérését $x_i(t)$ -vel jelöljük, a rendszer mozgása a következő recepttel írható le:

1. Felírjuk a rendszer összes elemének mozgásegyenletét, azaz minden $i = 1, 2, \dots, N$ -re egy

$$\ddot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^N \eta_j x_j(t)$$

alakú egyenletet (itt az η_j együtthatókat a rugók direkción ereje és a testek tömegei határozzák meg).

2. Megkeressük azokat az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ együtthatókat, melyekkel a testek kitéréséből képzett

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j(t)$$

lineárkombinációk egy harmonikus rezgőmozgás

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t)$$

egyenletét elégítik ki alkalmas ω körfrekvenciával. Általában N különböző ilyen $y_i(t)$ lineárkombinációt fogunk találni (ahol $i = 1, 2, \dots, N$). Ezekből egy kombinációhoz mindig zérus körfrekvencia tartozik, ez írja le az egyenletesen haladó mozgást.

3. Az $y_i(t)$ lineárkombinációkra vonatkozó rezgési egyenleteket megoldjuk és a megoldásokat illesztjük a kezdeti feltételekhez (kezdősebességek és kezdeti koordináták).
4. Végül az egyes testek $x_i(t)$ koordinátáit kifejezzük az $y_i(t)$ mennyiségekkel.

Az $y_i(t)$ mennyiségeket, vagy általánosabban fogalmazva a rendszer eredeti koordinátáinak olyan lineárkombinációit, amelyek időfüggése tisztán harmonikus (azaz az időnek egyetlen, adott körfrekvenciájú szinuszos függvényével írható le), *normálkoordinátáknak*, a nekik megfelelő ω_i körfrekvenciákat pedig a rendszer *saját(kör)frekvenciáinak* nevezzük. Az olyan mozgásformákat, melyekben egyetlen normálkoordináta kivételével mindegyik zérus, *sajátrezgésnek* vagy *normálrezgésnek* nevezzük. Például 3. példában szereplő gyöngyök az egyenletes, a lüktető és a tili-toli mozgásban sajátrezgéseket végeznek. Minden sajátrezgéshez tartozik egy amplitúdó-konfiguráció (a 3. példában a három sajátrezgéshez az amplitúdók $1 : 1 : 1$, $1 : 0 : 1$ és $1 : (-2) : 1$ aránya tartozott), ezeket *normálmódusoknak* nevezzük.

Vigh Máté